数理解析研究所講究録
995 巻 1997 年 51-57

DRESSING UP PROCEDURE と DELAUNAY 曲面

山梨大学教育学部 武藤秀夫 (Hideo MUTO)

1. Introduction

以前に, $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面 M_1 から新しい平均曲率一定曲面 M_2 の構成方法として, dressing up procedure を紹介した。この方法により, たとえば, M_1 が cylinder の時には, M_2 として Siervert 曲面が得られる。しかしながら, M_1 についてはその associated surface の情報以上の情報 (ある微分方程式の解) が必要とされ, cylinder 以外には具体的に M_2 を求めることができなかった。

ここでは, このような背景から, 平均曲率一定な回転面 (Delaunay 曲面) の dual surface について必要とされる情報を求めることが, $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率一定な回転面とその associated surface を求めることに帰着されることに注意し, これらを決定する。

まず, 我々が $\mathbb{R}^3$ で必要とする情報について説明する。

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面を,

$$F : \mathbb{C} \supset \Omega \ni z \to \mathbb{R}^3,$$
$$F^* ds^2_{\mathbb{R}^3} = e^{u(z)}|dz|^2,$$

とする表すとき, 球面以外で平均曲率一定 ($H = 1$) であることは, z を適当に取り替えることにより, 次の (1), (2) を満たす実数値関数 $u(z)$ と 2×2 行列値関数 $\psi(\nu, z)$ が存在することと同値である。

$$\psi_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_z & -\sqrt{-1}\nu \\ -\sqrt{-1}\nu & -u_z \end{pmatrix}\psi,$$
$$\psi_{\bar z} = \frac{1}{2\sqrt{-1}\nu}\begin{pmatrix} 0 & e^u \\ e^{-u} & 0 \end{pmatrix}\psi.$$

ここで, $|\nu| = 1$ に対しては, $\psi(\nu, z)$ は, associated surface の構造方程式の解とみなすことができる。

また, $\psi(\nu, z)$ は, $\mathbb{H}^3(-c^2)$ での Lawson 対応により対応する曲面の associated surface の構造方程式とみなすことができる (see H. B. Lawson Jr. [7], A. I. Bobenko [3])。

一方, $\mathbb{R}^3$ において, M. P. do Carmo–M. Dajczer [4] は, 直線の回りの回転と直線に沿った平行移動の結合で得られる等長変換 (helicoidal motion) で不変な曲面で平均曲率一定な曲面が, Delaunay 曲面の associated surface であることを示した。(See also G. Haak [6].)

そこで, 我々は, $\mathbb{H}^3(-1)$ 内の平均曲率一定な回転面の associated surface を helicoidal surface の中から見つけ出せばよいことになる。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Remark 1.1. *H. Mori* [9] により，$\mathbb{R}^3$ の場合と違って，$\mathbb{H}^3(-1)$ には，平均曲率一定な回転面と等長的な曲面が，他にも存在する。

2. Helicoidal surface in $\mathbb{H}^3(-1)$

M. P. do Carmo–M. Dajczer [4] による $\mathbb{R}^3$ 内の helicoidal surface の定義に従い，$\mathbb{H}^3(-1)$ 内の helicoidal surface を定義する。

まず，$\mathbb{H}^3(-1) = (\ \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\ \}\ , \frac{1}{z^2}(dx^2+dy^2+dz^2))$ とする。

Definition 2.1. $h \in \mathbb{R}$ に対して，

$$g_t^h(x,y,z) = e^{ht}(x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, z), \qquad t \in \mathbb{R},$$

を *helicoidal motion with axis the z–axis and pitch h* と呼ぶ。

Definition 2.2. ある $h \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{H}^3(-1)$ の等長変換群の部分群 g_t^h $(t \in \mathbb{R})$ で不変な曲面を *a helicoidal surface* と呼ぶ。

Remark 2.3. g_t^0 不変な曲面は，z 軸の回りの回転面である。

g_t^h 不変な曲面をグラフとして，

$$(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, F(\rho,\phi)), \tag{2.1}$$

と表すと，F は，

$$F(e^{ht}\rho, \phi + t) = e^{ht}F(\rho,\phi),$$

を満たす。

g_t^h による flow に直行する弧長パラメータ s の曲線をとることにより，immersion は，任意の正値関数 $U(s)$ を用いて，

$$e^{h\phi(s,t)+\lambda(s)}(r(s)\cos\phi(s,t), r(s)\sin\phi(s,t), 1), \tag{2.2}$$

また，induced metric は，

$$ds^2 + U(s)^2 dt^2, \tag{2.3}$$

と表せる。ここで，

$$U(s)dt = \pm\sqrt{r^2(1+h^2)+h^2}(d\phi + \frac{h(r(r\lambda'+1)+\lambda')}{r^2(1+h^2)+h^2}dr),$$

$$ds^2 = \frac{1}{r^2(1+h^2)+h^2}(r^2(1+h^2)\,d\lambda^2 + 2r^3\,dr\,d\lambda + (r^2+h^2)\,dr^2),$$

$$' = \frac{d}{ds}.$$

これを解くと，任意の定数 m ($m \neq 0$) に対して，

$$
(2.4)\qquad
\begin{cases}
r(s) = \dfrac{\sqrt{m^2U(s)^2 - h^2}}{\sqrt{1+h^2}}, \\
\lambda(s) = -\log\sqrt{m^2U(s)^2+1} \\
\qquad\qquad \pm (1+h^2)\displaystyle\int \frac{mU(s)\xi(s)}{(m^2U(s)^2-h^2)(m^2U(s)^2+1)}\,ds, \\
\psi(s) = \mp h\displaystyle\int \frac{\xi(s)}{mU(s)(m^2U(s)^2-h^2)}\,ds, \\
\phi(s,t) = \dfrac{t}{m} + \psi(s), \\
\xi(s) = \sqrt{(m^2U(s)^2-h^2)(m^2U(s)^2+1) - m^4U(s)^2U'(s)^2},
\end{cases}
$$

と表せる。

単位法ベクトル場として，次の N を選ぶと，

$$
N = \frac{e^{h\phi+\lambda}}{mU}(-(r\lambda'\cos\phi - hr'\sin\phi), -(r\lambda'\sin\phi + hr'\cos\phi), r(r\lambda'+r')),
$$

N に関する第2基本形式 II は，

$$
\begin{aligned}
II(\partial/\partial t, \partial/\partial t) &= \pm\frac{\xi}{m^2}, \\
II(\partial/\partial s, \partial/\partial t) &= -\frac{h}{m^2U}, \\
II(\partial/\partial s, \partial/\partial s) &= \frac{1}{II(\partial/\partial t, \partial/\partial t)}(U^2 - UU'' + II(\partial/\partial s, \partial/\partial t)^2),
\end{aligned}
$$

となり，平均曲率 H は，

$$
\mp 2H = \frac{m^2UU'' + m^2U'^2 - 2m^2U^2 - 1 + h^2}{\sqrt{(m^2U^2-h^2)(m^2U^2+1) - m^4U^2U'^2}},
$$

となる。

Theorem 2.4. $\mathbb{H}^3(-1)$ 内の平均曲率一定 H (≥ 0) な *helicoidal surface* は，正値関数 $U(s)$ を用いて，*(2.2), (2.4)* により，与えられる。また，この時，

$$
\xi(s) = \pm(Hm^2U(s)^2 - a),
$$

である。ここで，

$H > 1$ の時，$a \geq -\frac{1}{2}((1-h^2)H - (1+h^2)\sqrt{H^2-1})$, $s \in \mathbb{R}$ *(*$a \neq h^2H$ の時*)*，$s \neq 0$ *(*$a = h^2H$ の時*)*,

$$
m^2U(s)^2 = \frac{1-h^2+2aH}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{(1-h^2+2aH)^2 - 4(a^2+h^2)(H^2-1)}}{2(H^2-1)}\sin 2\sqrt{H^2-1}s,
$$

$H=1$ の時，$a \geq -\frac{1}{2}((1-h^2)H-(1+h^2)\sqrt{H^2-1})$，$s \in \mathbb{R}$ ($a \neq h^2H$ の時)，$s \neq 0$ ($a = h^2H$ の時)，

$$m^2U(s)^2 = \frac{a^2+h^2}{1-h^2+2a} + (1-h^2+2a)s^2,$$

$0 \leq H < 1$ の時，$a \in \mathbb{R}$，$s \in \mathbb{R}$ ($a \neq h^2H$ の時)，$s \neq 0$ ($a = h^2H$ の時)，

$$\begin{aligned} m^2U(s)^2 = &-\frac{1-h^2+2aH}{2(1-H^2)} \\ &+ \frac{\sqrt{(1-h^2+2aH)^2+4(a^2+h^2)(1-H^2)}}{2(1-H^2)} \cosh 2\sqrt{1-H^2}s. \end{aligned}$$

3. An associated surface

2 において，実数の組 (H, m, a, h) によって平均曲率一定な helicoidal surface が記述できることが分かった。

ここでは，回転面 ($h=0$) と等長的な平均曲率一定な helicoidal surface を決定し，さらに，associated surface になるものを決定する。

簡単のため，(H, m, a, h) によって定まる平均曲率一定 H 曲面を $[H, m, a, h]$ と書くことにする。

(2.3) と Theorem 2.4 により，次のことがすぐに分かる。

Lemma 3.1. $[H, m_0, a_0, 0]$ と $[H, m, a, h]$ が等長的であるための条件は，

$$\begin{cases} \dfrac{1+2a_0H}{m_0^2} = \dfrac{1-h^2+2aH}{m^2}, \\ \dfrac{a_0^2}{m_0^4} = \dfrac{a^2+h^2}{m^4}. \end{cases}$$

次に，共形座標に関する第 2 基本形式を求めるよう。$d\sigma = \frac{1}{U(s)}ds$ により，σ を定めると，(σ, t) に関する第 2 基本形式と Hopf differential Q は，

$$\begin{aligned} II(\partial/\partial\sigma, \partial/\partial\sigma) &= HU(s(\sigma))^2 + \frac{a}{m^2}, \\ II(\partial/\partial\sigma, \partial/\partial t) &= -\frac{h}{m^2}, \\ II(\partial/\partial t, \partial/\partial t) &= HU(s(\sigma))^2 - \frac{a}{m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4}(II(\partial/\partial\sigma, \partial/\partial\sigma) - II(\partial/\partial t, \partial/\partial t) - 2\sqrt{-1}II(\partial/\partial\sigma, \partial/\partial t)) \\ &= \frac{1}{2m^2}(a+\sqrt{-1}h), \end{aligned}$$

となる。associated surface は，$e^{\sqrt{-1}\theta}Q$ を Hopf differential にもつ等長的な曲面であるから，次を得る。

Theorem 3.2. H, m_0, a_0, θ が *Theorem 2.4* の条件を満たすとする。この時，もし，$H \geq 1$, $\theta = \pi$, $-\frac{1}{2}(H - \sqrt{H^2-1}) \leq a_0 \leq -\frac{1}{4H}$, でも，$0 < H < 1$, $\theta = \pi$, $a_0 \leq -\frac{1}{4H}$ でもないならば，

$$\frac{m^2}{m_0^2} = \frac{2}{\sqrt{(1+2a_0H(1-\cos\theta))^2 + 4a_0^2\sin^2\theta} + (1+2a_0H(1-\cos\theta))},$$

$$a = \frac{m^2}{m_0^2} a_0 \cos\theta,$$

$$h = \frac{m^2}{m_0^2} a_0 \sin\theta,$$

により，m, a, h を定めると，$[H, m, a, h]$ は，$[H, m_0, a_0, 0]$ の *associated surface* である。

Remark 3.3. 上の *Theorem 3.2* では，$H \geq 1$, $\theta = \pi$, $-\frac{1}{2}(H - \sqrt{H^2-1}) \leq a_0 \leq -\frac{1}{4H}$, 又は，$0 < H < 1$, $\theta = \pi$, $a_0 \leq -\frac{1}{4H}$ の時だけ，対応する $[H, a, m, h]$ を表示できない。

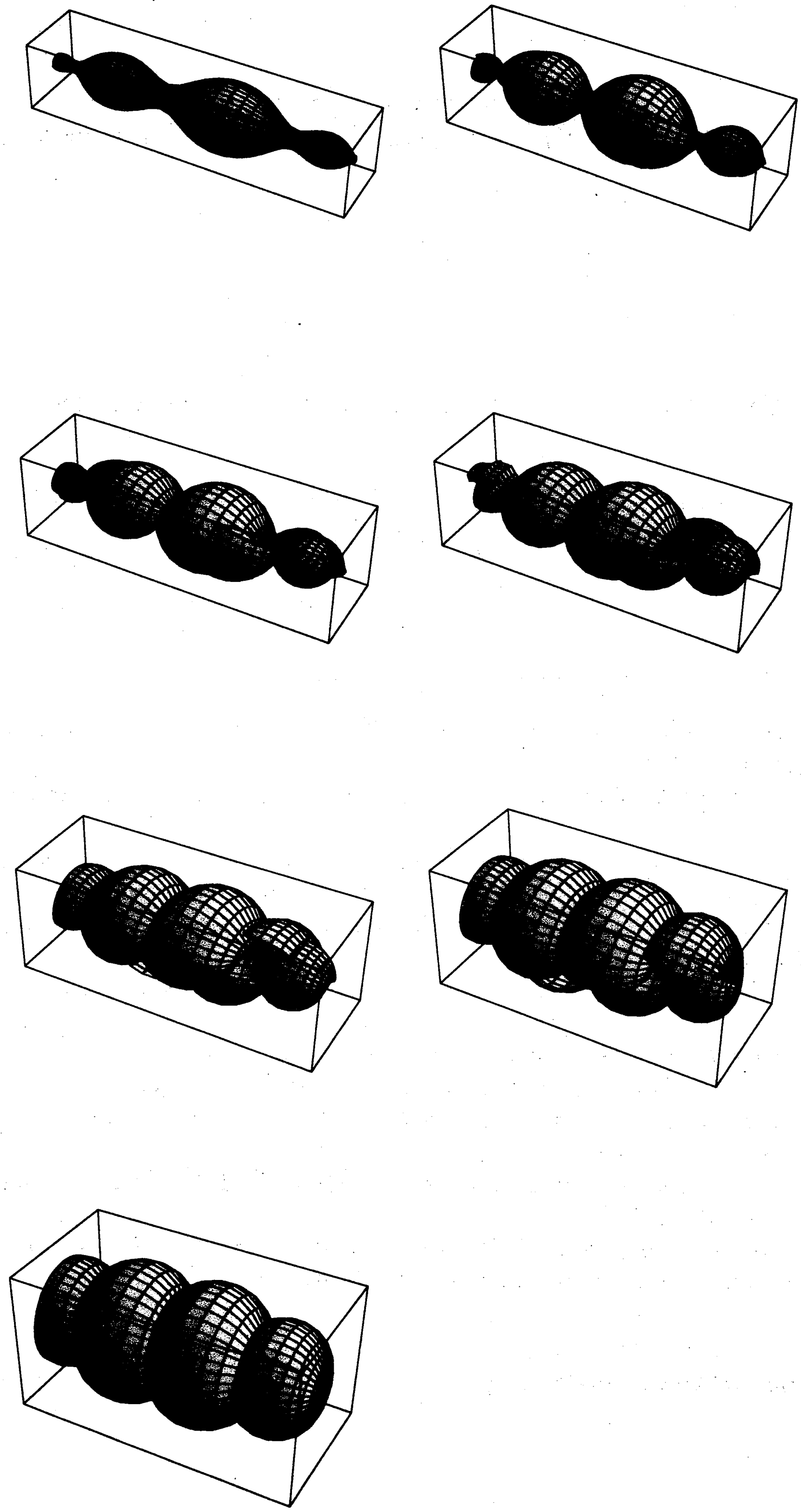
References

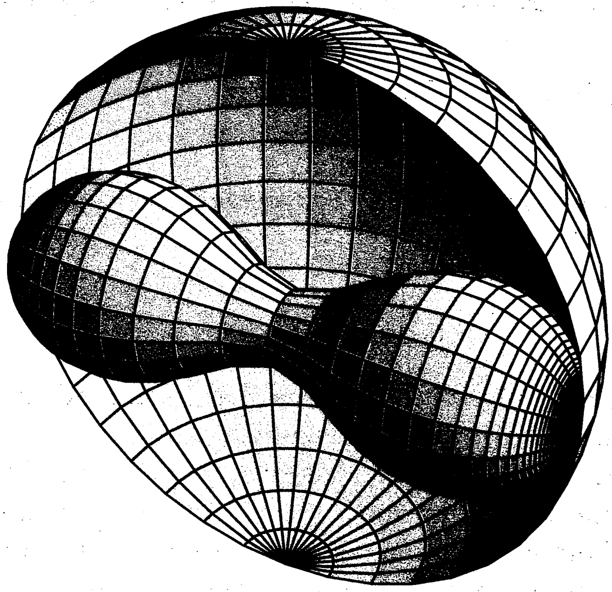
1. A. I. Bobenko, *All constant mean curvature tori in* $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{H}^3$ *in terms of theta-functions*, Math. Ann. **290** (1991), 209–245.
2. A. I. Bobenko, *All constant mean curvature surfaces and integrable equations*, Russian Math. Surveys **46** (1991), 1–45.
3. A. I. Bobenko, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, In "Harmonic Maps and Integrable Systems" (A. P. Fordy and John C. Wood, ed.), Vieweg, 1993.
4. M. P. do Carmo and M. Dajczer, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tohoku Math. J. **34** (1982), 425–435.
5. M. P. do Carmo and M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature* **277** (1983), 685–709.
6. G. Haak, *On a theorem by do Carmo and Dajczer, (preprint).*
7. H. B. Lawson Jr., *Complete minimal surfaces in* $\mathbf{S}^3$ **92** (1970), 335–374.
8. H. Mori, *Minimal surfaces of revolution on* $\mathbf{H}^3$ *and their global stability*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 787–794.
9. H. Mori, *Stable complete constant mean curvature surfaces in* $\mathbf{R}^3$ *and* $\mathbf{H}^3$, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), 671–687.
10. I. Sterling and H. Wente, *Existence and Classification of Constant Mean Curvature Multi-bubbletons of Finite and Infinite Type*, Indiana J. Math. **42** (1993), 1239–1266.

Takeda 4–4–37, Kofu city 400, Japan
E-mail address: hmuto@kkb.yamanashi.ac.jp

Associated Surfaces (in Poincaré disk)

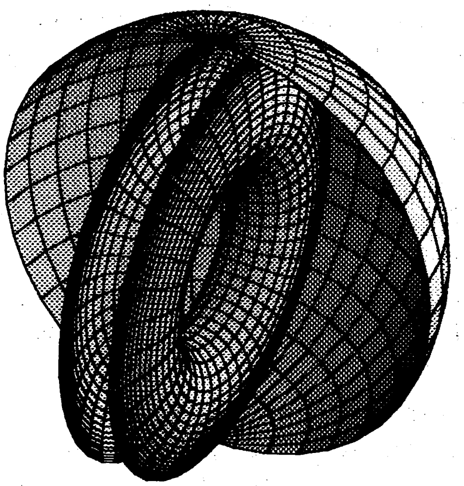
$a_0 = -0.1$
$H = 2$
$\theta = 0 \sim \pi$





$H = 1$

$a_0 = -0.2$



$H = 0.5$

$a_0 = 1$